

LBRIS

We know
books

Cornel Berceanu

**Gabriel Andrei
Marian Popa**

**Cristian Merticaru
Vasile Stoica**

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN
DE MATEMATICĂ
“GHEORGHE VRĂNCEANU”**

**BACĂU, EDIȚIILE
2003 și 2004**

EDITURA GIL

Cuprins

Prefață	3
I. Proba individuală 2003 – enunțuri	9
I.1. Clasa a VII –a	9
I.2. Clasa a VIII –a	9
I.3. Clasa a IX – a	10
I.4. Clasa a X – a	10
I.5. Clasa a XI – a	11
I.6. Clasa a XII – a	12
II. Proba individuală 2004 – enunțuri	13
II.1. Clasa a VII –a	13
II.2. Clasa a VIII –a	14
II.3. Clasa a IX – a	15
II.4. Clasa a X – a	16
II.5. Clasa a XI – a	17
II.6. Clasa a XII – a	18
III. Regulamentul concursului pe echipe	21
IV. Proba pe echipe 2003 – enunțuri	23
IV.1. Gimnaziu	23
IV.1.1. Setul I	23
IV.1.2. Setul II	23
IV.1.3. Setul III	24
IV.1.4. Setul IV	24
IV.1.5. Setul V	24
IV.1.6. Baraj I	25
IV.1.7. Baraj II	25
IV.1.8. Baraj III	25
IV.2. Liceu	25
IV.2.1. Setul I	25
IV.2.2. Setul II	26
IV.2.3. Setul III	27
IV.2.4. Setul IV	27

IV.2.5. Setul V	28
IV.2.6. Baraj I	29
IV.2.7. Baraj II	29
IV.2.8. Baraj III	29
IV.2.9. Baraj IV	30
IV.2.10. Baraj V	30
IV.2.11. Baraj VI	30
IV.2.12. Baraj VII	30
V. Proba pe echipe 2004 – enunțuri	31
V.1. Gimnaziu	31
V.1.1. Setul I	31
V.1.2. Setul II	31
V.1.3. Setul III	31
V.1.4. Setul IV	32
V.1.5. Setul V	32
V.1.6. Baraj I	32
V.1.7. Baraj II	33
V.1.8. Baraj III	33
V.1.9. Baraj IV	33
V.1.10. Baraj V	33
V.2. Liceu	33
V.2.1. Setul I	33
V.2.2. Setul II	35
V.2.3. Setul III	36
V.2.4. Setul IV	37
V.2.5. Setul V	38
V.2.6. Baraj I	38
V.2.7. Baraj II	39
V.2.8. Baraj III	39
V.2.9. Baraj IV	39
V.2.10. Baraj V	39
V.2.11. Baraj VI	40
VI. Proba individuală 2003 – rezolvări	41
VI.1. Clasa a VII – a	41
VI.2. Clasa a VIII – a	43
VI.3. Clasa a IX – a	44
VI.4. Clasa a X – a	46
VI.5. Clasa a XI – a	48
VI.6. Clasa a XII – a	50
VII. Proba individuală 2004 – rezolvări	55
VII.1. Clasa a VII – a	55
VII.2. Clasa a VIII – a	56
VII.3. Clasa a IX – a	60

VII.4. Clasa a X – a	62
VII.5. Clasa a XI – a	66
VII.6. Clasa a XII – a	69
VIII. Proba pe echipe 2003 – soluții	73
VIII.1. Gimnaziu	73
VIII.1.1. Setul I	73
VIII.1.2. Setul II	73
VIII.1.3. Setul III	74
VIII.1.4. Setul IV	75
VIII.1.5. Setul V	75
VIII.1.6. Baraj I	76
VIII.1.7. Baraj II	77
VIII.1.8. Baraj III	77
VIII.2. Liceu	78
VIII.2.1. Setul I	78
VIII.2.2. Setul II	80
VIII.2.3. Setul III	82
VIII.2.4. Setul IV	84
VIII.2.5. Setul V	87
VIII.2.6. Baraj I	89
VIII.2.7. Baraj II	90
VIII.2.8. Baraj III	90
VIII.2.9. Baraj IV	91
VIII.2.10. Baraj V	91
VIII.2.11. Baraj VI	92
VIII.2.12. Baraj VII	93
IX. Proba pe echipe 2004 – soluții	95
IX.1. Gimnaziu	95
IX.1.1. Setul I	95
IX.1.2. Setul II	96
IX.1.3. Setul III	96
IX.1.4. Setul IV	97
IX.1.5. Setul V	98
IX.1.6. Baraj I	98
IX.1.7. Baraj II	99
IX.1.8. Baraj III	99
IX.1.9. Baraj IV	100
IX.1.10. Baraj V	100
IX.2. Liceu	101
IX.2.1. Setul I	101
IX.2.2. Setul II	102
IX.2.3. Setul III	105
IX.2.4. Setul IV	107

IX.2.5. Setul V	112
IX.2.6. Baraj I	116
IX.2.7. Baraj II	117
IX.2.8. Baraj III	117
IX.2.9. Baraj IV	118
IX.2.10.Baraj V	118
IX.2.11.Baraj VI	119

I. Proba individuală 2003 – enunțuri

I.1. Clasa a VII-a

1. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC . Punctul de intersecție al bisectoarei din B și înălțimii din C îl notăm cu M . Pe perpendiculara din B pe BC , dusă în semiplanul care nu-l conține pe M , luăm punctul N , astfel încât $BN = CM$. Să se arate că $NC \parallel BM$.

2. Fie numerele $101, 10101, 1010101, \dots, \underbrace{101\dots01}_{2004 \text{ de } 1}$. Să se arate că măcar unul dintre ele este multiplu de 2003.

3. Fie ABC un triunghi neisoscel. Să se precizeze care sunt punctele M interioare triunghiului pentru care mulțimile formate din următoarele 3 elemente:

$$m(\widehat{MAB}), m(\widehat{MBC}), m(\widehat{MCA}), \text{ respectiv}$$

$$m(\widehat{MBA}), m(\widehat{MCB}), m(\widehat{MAC}) \text{ coincid.}$$

4. Fie n un număr natural divizibil cu 7. Să se arate că numărul :
 $N := (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$
 nu poate fi un pătrat perfect.

I.2. Clasa a VIII-a

1. Fie numerele reale:

$$a := \sqrt{x^4 - 5x^3 + 7x^2} + \sqrt{9x^2 - 45x + 63} \text{ și}$$

$$b := \sqrt{x^4 + x^3 - 14x^2 - 3x + 63}.$$

Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = b$.

2. Să se arate că nu există nici un punct M pe perpendiculara în D pe planul dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{MBA}) = 30^\circ$.

3. În două cutii A și B punem obiectele $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$. Dacă în cutia A punem doar obiectele x_5, x_4, x_1, x_0 (celelalte fiind în B), scriem numărul natural

$$0110011_{(2)} = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Procedând astfel, calculați în câte moduri se pot pune cele 7 obiecte în cele două cutii.

4. Fie $\triangle ABC$ conținut în planul α și $\triangle DEF$, exterior lui α . Dacă AD, BE și CF sunt perpendiculare pe α , $[AD] \equiv [BC]$, $[BE] \equiv [AC]$ și $[CF] \equiv [AB]$, să se precizeze, în raport cu triunghiul ABC , poziția unui punct $G \in \alpha$, echidistant de D, E și F .

I.3. Clasa a IX-a

1. Determinați toate numerele naturale n pentru care a doua zecimală a părții fracționare a numărului $\sqrt{n(n+1)}$ nu este 9.

2. Se consideră numerele reale strict pozitive a_1, a_2, \dots, a_n și numerele reale p_1, p_2, \dots, p_n mai mari ca 1. Fie $P := p_1 p_2 \dots p_n$. Să se arate că :

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \leq \max_{1 \leq k \leq n} (a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k P + a_{k+1} + \dots + a_n).$$

3. Fie paralelogramul $ABCD$ și $P \in \text{Int } ABCD$, astfel încât $\widehat{PAD} \equiv \widehat{PCD}$. Arătați că bisectoarele unghiurilor BAD și BPD sunt paralele.

4. Să se rezolve ecuația : $(X \cup \bar{A}) \cap (\bar{X} \cup A) = B$, unde $A, B \subseteq T$, iar T este o mulțime dată. (Prin \bar{M} înțelegem $T \setminus M$, unde $M \subseteq T$.)

I.4. Clasa a X-a

1. Fie mulțimea $M \subseteq \mathbb{R}^*$ și fie $f : M \rightarrow M$ o funcție bijectivă cu proprietatea:

I.5. Clasa a XI-a

$$f(x) + f^{-1}(x) = x, \quad \forall x \in M.$$

Demonstrați că:

- M este o mulțime simetrică,
- f este funcție impară.
- Să se determine numărul minim de elemente ale mulțimii M .

2. Fie $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ numere reale. Să se arate că aceste numere sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă printre toate diferențele:

$$a_j - a_i, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

exact $n-1$ sunt diferite.

3. Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ distincte două câte două cu proprietatea că :

$$(z_1 + z_2)^3 = (z_2 + z_3)^3 = (z_3 + z_1)^3.$$

Să se arate că :

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|.$$

4. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și D, E, F picioarele perpendicularelor din I , respectiv pe laturile BC, CA, AB . Să se arate că:

$$\frac{AB}{DE} + \frac{BC}{EF} + \frac{CA}{FD} \geq 6.$$

I.5. Clasa a XI-a

1. Fie A o matrice din $M_2(\mathbb{C})$ și n un număr natural nenul cu $Tr(A^n) = Tr(A^{n+1}) = 0$. Atunci $A^2 = O_2$.

2. Fie $a > 0$ un număr real și fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale distincte care îndeplinește condițiile:

$$(a) \quad x_n \in (0, a), \quad \forall n \geq 1;$$

$$(b) \quad |x_n - x_m| \geq \frac{m+n}{amn}, \quad \forall m, n \text{ cu } m \neq n.$$

Să se arate că $a \geq 2$.

3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se consideră șirul cu termenul general

$$a_n(x) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} [kx]. \text{ Se notează } A := \{x \in \mathbb{R} \mid (a_n(x))_{n \geq 1} \text{ convergent}\} \text{ și}$$

$$L := \{l \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, (a_n(x))_{n \geq 1} \text{ are limita } l\}.$$

- a. Să se determine L .
- b. Să se determine A .

4. Fie A o mulțime de 16 numere dintre numerele $1, 2, 3, \dots, 100$. Să se arate că există patru numere distincte $a, b, c, d \in A$ astfel încât $a+b=c+d$.

I.6. Clasa a XII-a

1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 1$, grupul permutărilor S_{2n} conține un subgrup abelian de ordin n^2 .
2. Fie numărul real a și funcția $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, continuă în a . Să se arate că f admite primitive pe (a, ∞) dacă și numai dacă f admite primitive pe $[a, \infty)$.
3. Fie n un număr natural, $n > 3$, astfel încât $n \mid 2^n + 1$. Să se arate că $9 \mid n$.
4. Determinați numărul de funcții $f : N^* \rightarrow N^*$, pentru care are loc $f^{(3)}(n) = n + 3$, oricare ar fi $n \in N^*$. [S-a notat cu $f^{(3)}$ compunerea $f \circ f \circ f$.]

II. Proba individuală 2004 – enunțuri

II.1. Clasa a VII – a

1. Câte numere naturale de 4 cifre , mai mici decât 2004 , împărțite la 5, la 6 și la 8 dau resturile 2, 1 și respectiv 7 ?

2. Fie triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 90^\circ$.

Se definește mulțimea:

$$M := \left\{ P \in [BC] / AP = \frac{AB \cdot AC}{2AD} \right\} \quad (D \in BC \text{ și } AD \perp BC) .$$

a. Să se arate că mulțimea M este nevidă.

b. Dacă M are mai mult de un element, să se găsească toate valorile pe care le poate avea $m(\widehat{ACB})$.

3. Fie triunghiul ABC în care $m(\hat{B}) = 75^\circ, m(\hat{C}) = 45^\circ, BM \perp AC$, $M \in AC$ și $D \in (AB)$ astfel încât $m(\widehat{ACD}) = 15^\circ$. Perpendiculara în D pe CD intersectează dreapta BM în E . Să se arate că $[ED] \equiv [BC]$ și să se determine $m(\widehat{BEC})$.

4. La un depozit se aduc: x kg de mere de prima calitate, ce s-ar putea vinde cu p lei / kg , și y kg de mere de a doua calitate, ce s-ar putea vinde cu q lei / kg (x și y sunt numere naturale nenule necunoscute, iar p și q sunt numere naturale nenule cunoscute și $p > q + 1$). După ce merele se amestecă, un kg de mere costă r lei, unde r se calculează după formula:

$$(1) \quad r = \frac{p \cdot x + q \cdot y}{x + y}.$$

Să se arate că: pentru orice număr natural r cu $p > r > q$, cantitățile x și y de mere pentru care prețul unui kg este r lei (r fiind calculat după formula (1)) sunt :

$$x = \frac{r - q}{(r - q, p - r)} \cdot t, \quad y = \frac{p - r}{(r - q, p - r)} \cdot t \quad (t \in \mathbb{N}^*).$$

(Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale $r - q$ și $p - r$ s-a notat cu $(r - q, p - r)$.)

II.2. Clasa a VIII-a

1. Se dă mulțimea $M := \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 121\}$. Precizați numărul natural $k \geq 2$ și dați un exemplu de mulțimi nevide $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ cu proprietățile :

- (1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_k = M$;
- (2) pentru $i \neq j$ din $\{1, 2, \dots, k\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- (3) dacă $n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ și $3^n \in A_i$, atunci A_i are 3^n elemente.

2. Se consideră un paralelipiped $ABCD A' B' C' D'$ și un punct $P \in (AB)$. Planul (ADD') intersectează dreptele CP și $C'P$ în punctele M respectiv N , iar planul (BCC') intersectează dreptele DP și $D'P$ în R respectiv S . Să se arate că :

- (1) Punctele M, N, R, S sunt coplanare.
- (2) $MNSR$ este paralelogram $\Leftrightarrow P$ este mijlocul segmentului AB .

3. Să se arate că:

$$\frac{1}{2} (a^{2004} + b^{2004}) \geq \frac{1}{4} (a^{1002+m} \cdot b^{1002-m} + a^{1002+n} \cdot b^{1002-n} + a^{1002-m} \cdot b^{1002+m} + a^{1002-n} \cdot b^{1002+n}),$$

unde $a > 0$, $b > 0$ sunt numere reale, iar m și n sunt numere naturale, cel mult egale cu 1002.