Cornel Berceanu
Gabriel Andrei
Marian Popa
Cristian Merticaru
Vasile Stoica

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "GHEORGHE VRĂNCEANU"

BACĂU, EDIȚIILE
2003 şi 2004

EDITURA GIL

Cuprins

I. Proba individuală 2003 – enunțuri

I.1. Clasa a VII-a

1. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC. Punctul de intersecție al bisectoarei din B și înălțimii din C îl notăm cu M. Pe perpendiculara din B pe BC, dusă în semiplanul care nu-l conține pe M, luăm punctul N, astfel încât $BN = CM$. Să se arate că $NC \parallel BM$.

2. Fie numerele 101, 10101, 1010101,..., $\underbrace{101...01}_{2004 \text{ de } 1}$. Să se arate că măcar unul dintre ele este multiplu de 2003.

3. Fie ABC un triunghi neisoscel. Să se precizeze care sunt punctele M interioare triunghiului pentru care mulțimile formate din următoarele 3 elemente:

$$m(\widehat{MAB}), m(\widehat{MBC}), m(\widehat{MCA}), \text{ respectiv}$$

$$m(\widehat{MBA}), m(\widehat{MCB}), m(\widehat{MAC}) \text{ coincid.}$$

4. Fie n un număr natural divizibil cu 7. Să se arate că numărul :

$$N := (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$$

nu poate fi un pătrat perfect.

I.2. Clasa a VIII-a

1. Fie numerele reale:

$$a := \sqrt{x^4 - 5x^3 + 7x^2} + \sqrt{9x^2 - 45x + 63} \text{ și}$$

$$b := \sqrt{x^4 + x^3 - 14x^2 - 3x + 63}.$$

Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = b$.

2. Să se arate că nu există nici un punct M pe perpendiculara în D pe planul dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 60^\circ$ şi $m(\widehat{MBA}) = 30^\circ$.

3. În două cutii A şi B punem obiectele $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$. Dacă în cutia A punem doar obiectele x_5, x_4, x_1, x_0 (celelalte fiind în B), scriem numărul natural

$$0110011_{(2)} = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Procedând astfel, calculaţi în câte moduri se pot pune cele 7 obiecte în cele două cutii.

4. Fie ΔABC conţinut în planul α şi ΔDEF, exterior lui α. Dacă AD, BE şi CF sunt perpendiculare pe α, $[AD] \equiv [BC]$, $[BE] \equiv [AC]$ şi $[CF] \equiv [AB]$, să se precizeze, în raport cu triunghiul ABC, poziţia unui punct $G \in \alpha$, echidistant de D, E şi F.

I.3. Clasa a IX-a

1. Determinaţi toate numerele naturale n pentru care a doua zecimală a părţii fracţionare a numărului $\sqrt{n(n+1)}$ nu este 9.

2. Se consideră numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi numerele reale $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mai mari ca 1. Fie $P := p_1 p_2 \ldots p_n$. Să se arate că:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n \le \max_{1 \le k \le n}(a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k P + a_{k+1} + \ldots + a_n).$$

3. Fie paralelogramul $ABCD$ şi $P \in Int\ ABCD$, astfel încât $\widehat{PAD} \equiv \widehat{PCD}$. Arătaţi că bisectoarele unghiurilor BAD şi BPD sunt paralele.

4. Să se rezolve ecuaţia: $\left(X \cup \overline{A}\right) \cap \left(\overline{X} \cup A\right) = B$, unde $A, B \subseteq T$, iar T este o mulţime dată. (Prin $\overline{M}$ înţelegem $T \setminus M$, unde $M \subseteq T$.)

I.4. Clasa a X-a

1. Fie mulţimea $M \subseteq \mathbb{R}^*$ şi fie $f : M \to M$ o funcţie bijectivă cu proprietatea:

$$f(x)+f^{-1}(x)=x,\ \forall x\in M\ .$$

Demonstrați că:

a. M este o mulțime simetrică,

b. f este funcție impară.

c. Să se determine numărul minim de elemente ale mulțimii M.

2. Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ numere reale. Să se arate că aceste numere sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă printre toate diferențele:

$$a_j - a_i, 1 \le i < j \le n,$$

exact n-1 sunt diferite.

3. Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ distincte două câte două cu proprietatea că :

$$(z_1+z_2)^3 = (z_2+z_3)^3 = (z_3+z_1)^3.$$

Să se arate că :

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|.$$

4. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi D, E, F picioarele perpendicularelor din I, respectiv pe laturile BC, CA, AB. Să se arate că:

$$\frac{AB}{DE}+\frac{BC}{EF}+\frac{CA}{FD}\ge 6\ .$$

I.5. Clasa a XI-a

1. Fie A o matrice din $M_2(\mathbb{C})$ şi n un număr natural nenul cu $Tr(A^n) = Tr(A^{n+1}) = 0$. Atunci $A^2 = O_2$.

2. Fie $a > 0$ un număr real şi fie $(x_n)_{n\ge 1}$ un şir de numere reale distincte care îndeplineşte condițiile:

(a) $x_n \in (0,a), \forall n \ge 1$;

(b) $|x_n - x_m| \ge \dfrac{m+n}{amn}, \forall m,n$ cu $m \ne n$.

Să se arate că $a \ge 2$.

3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se consideră şirul cu termenul general $a_n(x) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}[kx]$. Se notează $A := \{x \in \mathbb{R} | (a_n(x))_{n\ge 1}$ convergent$\}$ şi

$$L := \left\{ l \in \mathbb{R} \middle| \exists x \in A, \left(a_n(x)\right)_{n\geq 1} \text{ are limita } l \right\}.$$

a. Să se determine L.
b. Să se determine A.

4. Fie A o mulțime de 16 numere dintre numerele 1,2,3,...,100. Să se arate că există patru numere distincte $a,b,c,d \in A$ astfel încât $a+b=c+d$.

I.6. Clasa a XII-a

1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 1$, grupul permutărilor S_{2n} conține un subgrup abelian de ordin n^2.

2. Fie numărul real a şi funcția $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, continuă în a. Să se arate că f admite primitive pe (a,∞) dacă şi numai dacă f admite primitive pe $[a,\infty)$.

3. Fie n un număr natural, $n>3$, astfel încât $n \mid 2^n+1$. Să se arate că $9 \mid n$.

4. Determinați numărul de funcții $f:N^*\to N^*$, pentru care are loc $f^{(3)}(n)=n+3$, oricare ar fi $n\in N^*$. [S-a notat cu $f^{3)}$ compunerea $f\circ f\circ f$.]

II. Proba individuală 2004 – enunțuri

II.1. Clasa a VII – a

1. Câte numere naturale de 4 cifre , mai mici decât 2004 , împărțite la 5, la 6 și la 8 dau resturile 2, 1 și respectiv 7 ?

2. Fie triunghiul ABC în care $m\left(\hat{A}\right)=90^\circ$.

Se definește mulțimea:

$$M := \left\{ P \in [BC] / AP = \frac{AB \cdot AC}{2AD} \right\} \ (D \in BC \text{ şi } AD \perp BC).$$

a. Să se arate că mulțimea M este nevidă.

b. Dacă M are mai mult de un element, să se găsească toate valorile pe care le poate avea $m\left(\widehat{ACB}\right)$.

3. Fie triunghiul ABC în care $m\left(\hat{B}\right)=75^\circ, m\left(\hat{C}\right)=45^\circ, BM \perp AC$, $M \in AC$ și $D \in (AB)$ astfel încât $m\left(\widehat{ACD}\right)=15^\circ$. Perpendiculara în D pe CD intersectează dreapta BM în E. Să se arate că $[ED] \equiv [BC]$ și să se determine $m\left(\widehat{BEC}\right)$.

4. La un depozit se aduc: x kg de mere de prima calitate, ce s-ar putea vinde cu p lei / kg , și y kg de mere de a doua calitate, ce s-ar putea vinde cu q lei / kg (x și y sunt numere naturale nenule necunoscute, iar p și q sunt numere naturale nenule cunoscute și $p > q+1$). După ce merele se amestecă, un kg de mere costă r lei, unde r se calculează după formula:

(1) $r = \dfrac{p \cdot x + q \cdot y}{x+y}$.

Să se arate că: pentru orice număr natural r cu $p > r > q$, cantitățile x și y de mere pentru care prețul unui kg este r lei (r fiind calculat după formula (1)) sunt :

$$x = \frac{r-q}{(r-q, p-r)} \cdot t,\ y = \frac{p-r}{(r-q, p-r)} \cdot t \quad (t \in \mathbb{N}^*).$$

(Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale $r-q$ și $p-r$ s-a notat cu $(r-q, p-r)$.)

II.2. Clasa a VIII-a

1. Se dă mulțimea $M := \{x \in \mathbb{N} | 1 \le x \le 121\}$. Precizați numărul natural $k \ge 2$ și dați un exemplu de mulțimi nevide $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ cu proprietățile :

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_k = M$;

(2) pentru $i \ne j$ din $\{1, 2, \ldots, k\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;

(3) dacă $n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ și $3^n \in A_i$, atunci A_i are 3^n elemente.

2. Se consideră un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ și un punct $P \in (AB)$. Planul (ADD') intersectează dreptele CP și $C'P$ în punctele M respectiv N, iar planul (BCC') intersectează dreptele DP și $D'P$ în R respectiv S. Să se arate că :

(1) Punctele M, N, R, S sunt coplanare.

(2) $MNSR$ este paralelogram $\Leftrightarrow$ P este mijlocul segmentului AB.

3. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}\left(a^{2004} + b^{2004}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{4}\left(a^{1002+m} \cdot b^{1002-m} + a^{1002+n} \cdot b^{1002-n} + a^{1002-m} \cdot b^{1002+m} + a^{1002-n} \cdot b^{1002+n}\right),$$

unde $a > 0$, $b > 0$ sunt numere reale, iar m și n sunt numere naturale, cel mult egale cu 1002.